1.4. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ Xo

Οι μαθητές πρέπει:

- Να έχουν κατανοήσει την έννοια του ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Να βρίσκουν το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.
- Να γνωρίζουν την έννοια των πλευρικών ορίων.
- Να γνωρίζουν το όριο της ταυτοτικής και της σταθερής συνάρτησης.
- Να γνωρίζουν πότε μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της συνάρτησης σε κάποιο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Η έννοια του ορίου

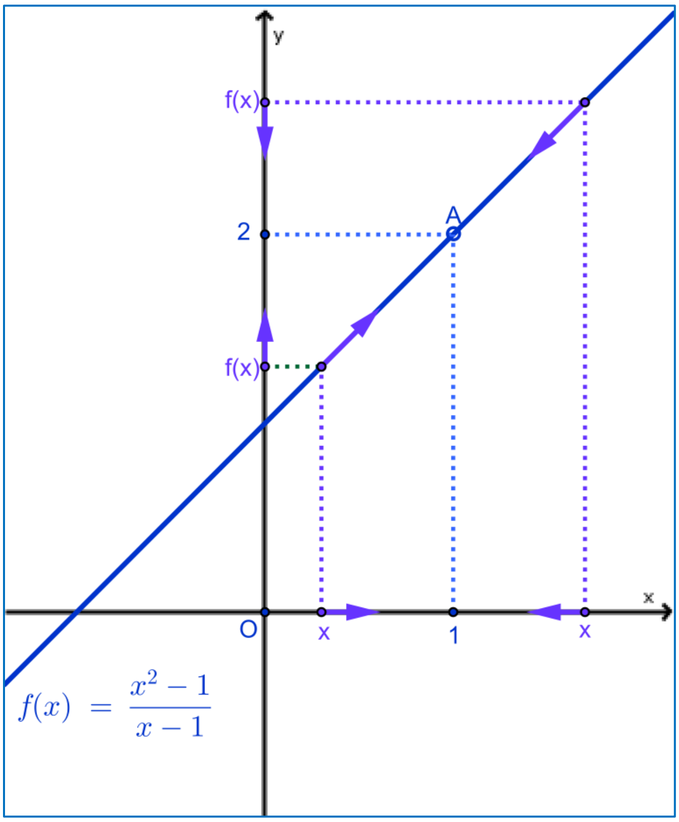
Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ και γράφεται

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,\ x\neq 1.$$

Επομένως , η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $\varepsilon: y=x+1$ με εξαίρεση
το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$.

Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι: «Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στο άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2»



Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ και διαβάζουμε:

«το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο 1, είναι 2».

Θεωρία

Γενικά:

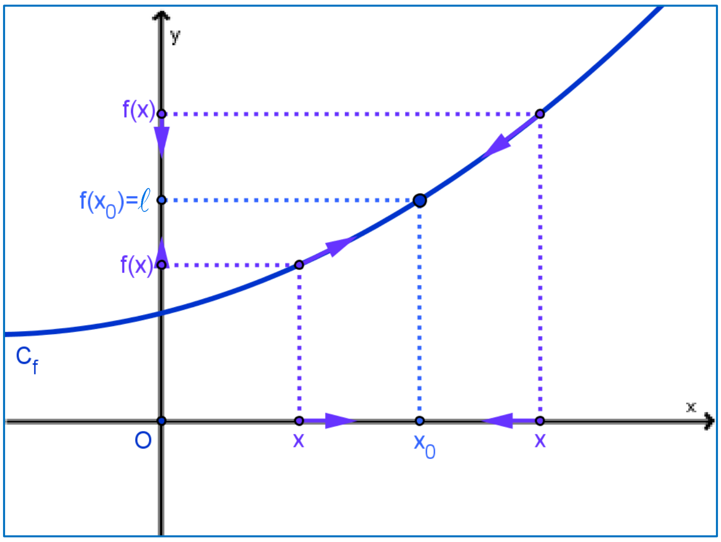
Όταν οι τιμές μια συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

και διαβάζουμε:

«το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ» ή

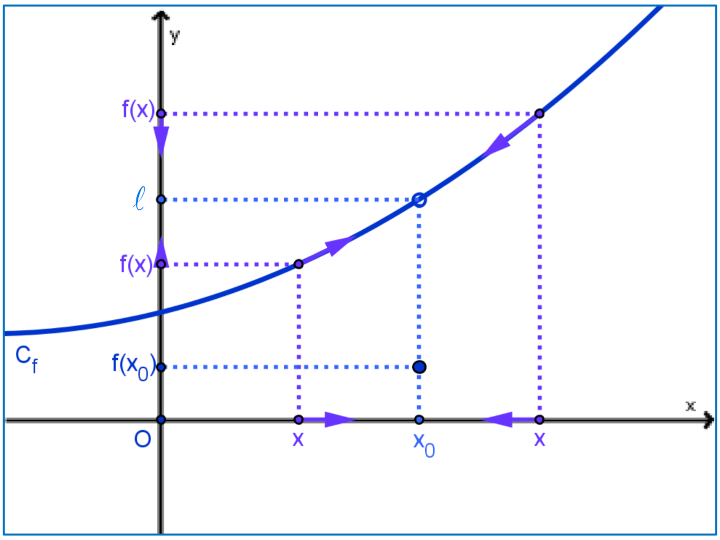
«το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ».

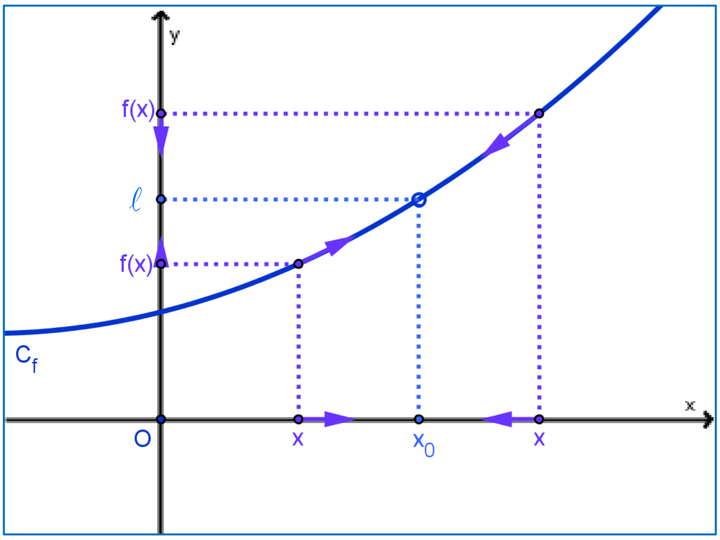


Σχόλιο:

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι:

- Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε «κοντά στο x_0», δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (α,x_0) ή (x_0,β).
- Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριο της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό.
- Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σ' αυτό.

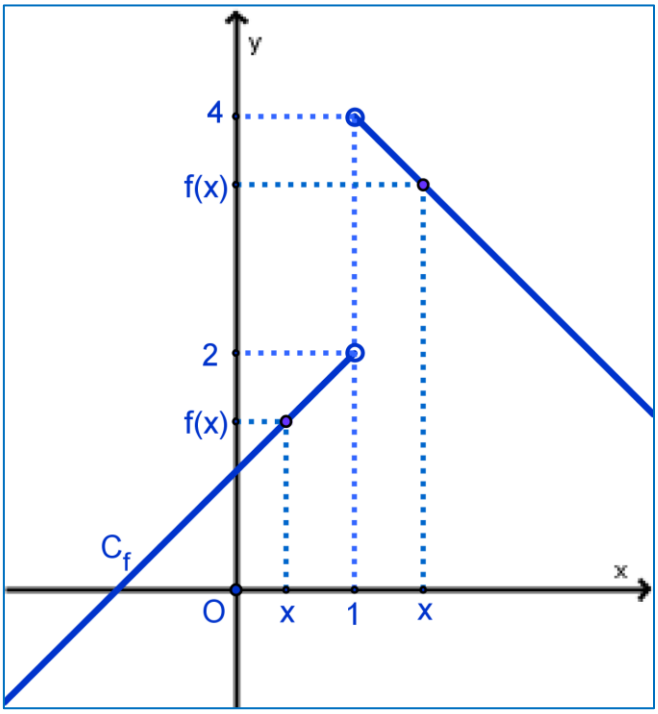




Έστω τώρα η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.



Παρατηρούμε ότι:

⇨Όταν το x προσεγγίζει το 1 από αριστερά ($x<1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

⇨Όταν το x προσεγγίζει το 1 από δεξιά ($x>1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$

Γενικά:

⇨Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x<x_0$), τότε γράφουμε: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$ και διαβάζουμε: «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1»

⇨Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x>x_0$), τότε γράφουμε: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell_2$ και διαβάζουμε: «το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2»

Τους αριθμούς $\ell_1=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0. Είναι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

Έτσι η παραπάνω συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases}$ δεν έχει όριο στο $x_0=1$ αφού

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Θ
ε
ω
ρ
ί
α

Ορισμός του ορίου στο x_0

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0, τότε αυτό είναι **μοναδικό** και συμβολίζεται, όπως είδαμε, με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Συνέπεια του ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - \ell \right) = 0$$

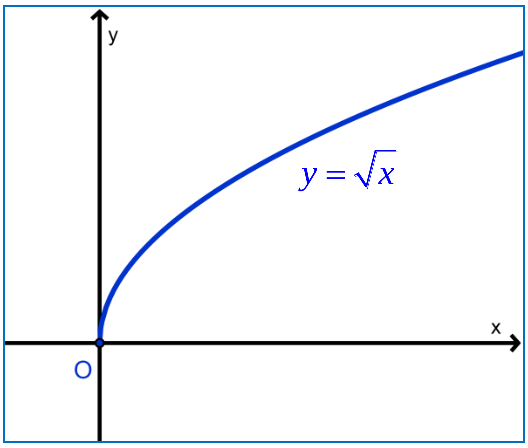
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$$

Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0), τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Για παράδειγμα:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

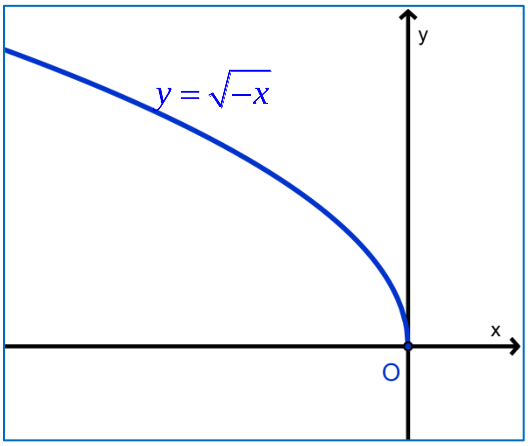


Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β), τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Για παράδειγμα:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{-x} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0$$



Σχόλιο: Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

ΣΥΜΒΑΣΗ

Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει κοντά στο x_0 μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

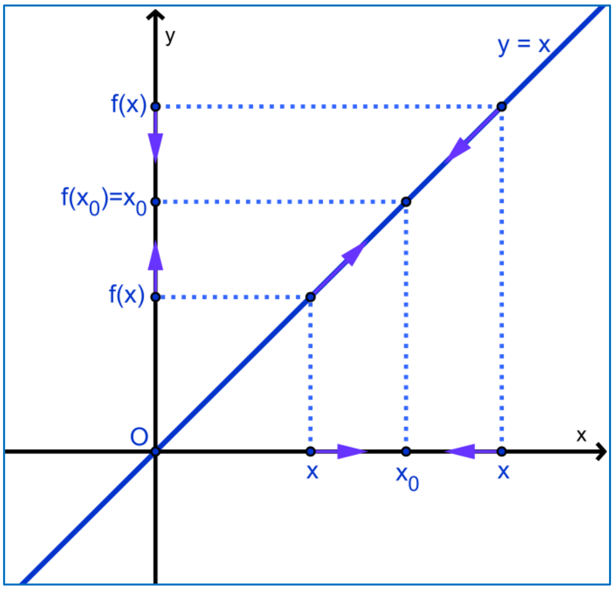
- Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.
- Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).
- Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

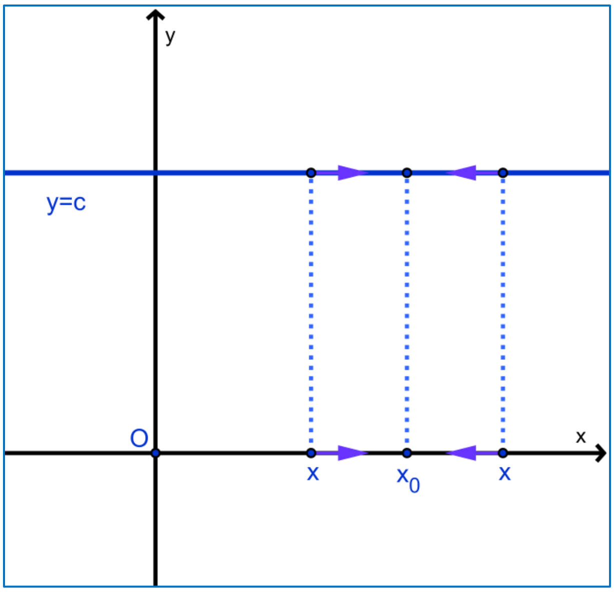
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι θετική κοντά στο $x_0 = 0$, αφού ορίζεται στο σύνολο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και είναι θετική σε αυτό.

Όριο ταυτοτικής – σταθερής συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \qquad \lim_{x \to x_0} c = c$$





Η πρώτη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο x_0, ενώ η δεύτερη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της σταθερής συνάρτησης $g(x) = c$ στο x_0 είναι ίσο με c.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γραφική παράσταση και όρια

Άσκηση 1.4.1.

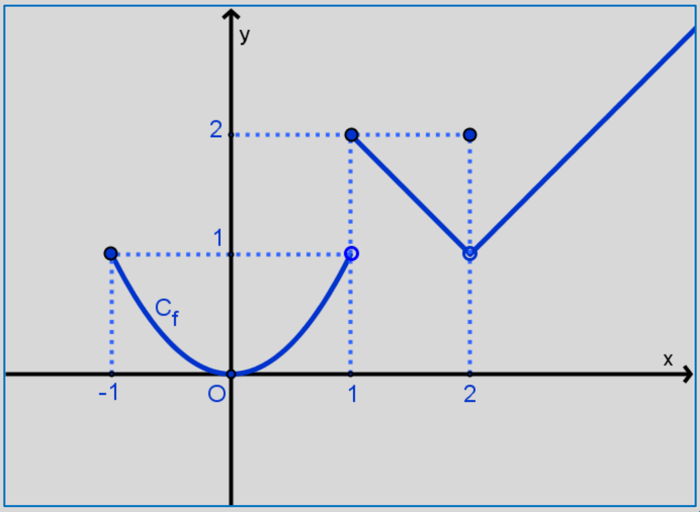
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια και τις τιμές:

α. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ και $f(-1)$

β. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $f(1)$

γ. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ και $f(2)$

δ. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$



α. Είναι $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$ και $f(-1)=1$

(Εδώ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$)

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0,β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α,x_0), τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$.

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Έχουμε $f(1)=2$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν για μία συνάρτηση τα πλευρικά όρια στο x_0 είναι $\ell_1=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, θα υπάρχι το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ αν και μόνο αν $\ell_1=\ell_2$ και θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1=\ell_2$.

γ. Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$. Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$. Ακόμη $f(2)=2$.

(Εδώ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$)

δ. Η f δεν ορίζεται «κοντά» στο $x_0=-2$ οπότε δεν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

Άσκηση 1.4.2.

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-|x|}{|x|-1}$.

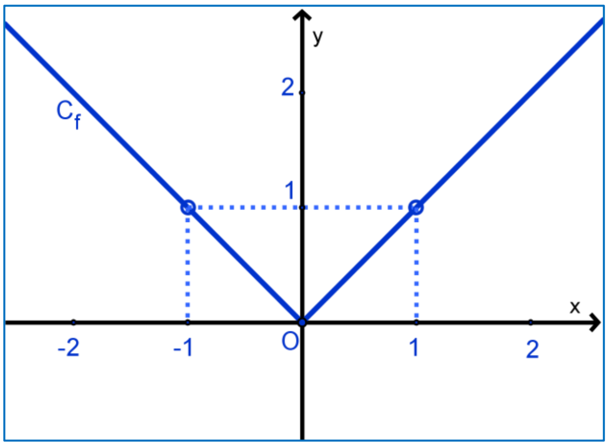
α. Να σχεδιάσετε την C_f. **β.** Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

α. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ και ο τύπος της γράφεται:

$$f(x)=\frac{x^2-|x|}{|x|-1}=\frac{|x|^2-|x|}{|x|-1}=\frac{|x|\left(|x|-1\right)}{|x|-1}=$$

$$=|x|=\begin{cases} x, & 0\le x\neq 1 \\ -x, & -1\neq x<0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β. Είναι $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

Αναζήτηση ορίου

Άσκηση 1.4.3.

Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$:

α. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ και $x_0=2$ **β.** $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ και $x_0=1$

γ. $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{-x^2-x+6}$ και $x_0=2$

α. Πρέπει $x^2-1\ge 0 \Leftrightarrow x\le -1$ ή $x\ge 1$.
Άρα $D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ κι έτσι έχει νόημα η αναζήτηση του $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

β. Πρέπει $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Άρα $D_f=(1,+\infty)$ κι έτσι έχει νόημα η αναζήτηση του $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

γ. Πρέπει $x^2-4\ge 0 \Leftrightarrow x\le -2$ ή $x\ge 2$ και $-x^2-x+6\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 2$.
Άρα $D_f=[-3,-2]\cup\{2\}$ κι έτσι ενώ η f ορίζεται στο $x_0=2$, δεν ορίζεται «κοντά στο 2» και δεν έχει νόημα η αναζήτηση του $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε «κοντά στο x_0», δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (α,x_0) ή (x_0,β)

Λυμένες Ασκήσεις

Ιδιότητες των ορίων

Άσκηση 1.4.4.

Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, με $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda-2\kappa$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=3\lambda-\kappa$. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι 5, να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

Θα πρέπει να είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=5$

Δηλαδή $\begin{cases}\lambda-2\kappa=5\\ 3\lambda-\kappa=5 \ {\scriptstyle -2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda-2\kappa=5\\ -6\lambda+2\kappa=-10 \ {\scriptstyle (+)}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda-2\kappa=5\\ -5\lambda=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2\kappa=5\\ \lambda=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa=-2\\ \lambda=1\end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν για μία συνάρτηση τα πλευρικά όρια στο x_0 είναι $\ell_1=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, θα υπάρχι το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ αν και μόνο αν $\ell_1=\ell_2$ και θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1=\ell_2$.

Άσκηση 1.4.5.

Αν $\lim\limits_{h\to 0} f(1+h)=3$ να βρείτε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-3\right)$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+3\right)$

α. Είναι $\lim\limits_{h\to 0} f(1+h)=3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-3\right)=0$

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+3-3-3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left[\left(f(x)+3\right)-6\right]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+3\right)=6$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-\ell\right)=0$

και

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.4.6. Να επιλέξετε το σωστό (Σ) ή το λάθος (Λ) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν μία συνάρτηση έχει όριο στο x_0, τότε αυτό είναι μοναδικό. Σ□ Λ□

β. Αν μία συνάρτηση έχει όριο στο x_0, τότε $x_0 \in D_f$. Σ□ Λ□

γ. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-\ell\right)=0$ Σ□ Λ□

δ. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-\ell\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$ Σ□ Λ□

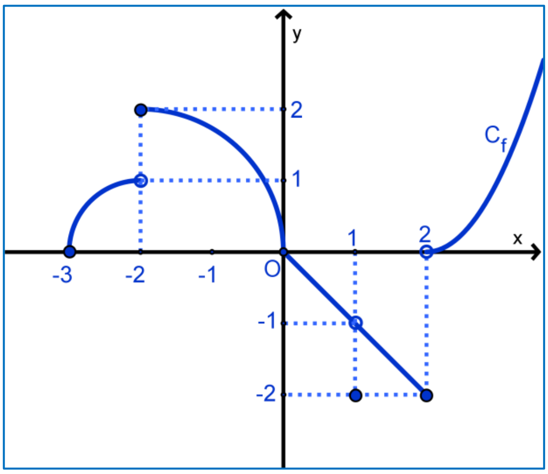
ε. Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$ Σ□ Λ□

στ. Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0,β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α,x_0),

τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ Σ□ Λ□

ζ. $\lim\limits_{x\to x_0} 2017=2017$ Σ□ Λ□

1.4.7. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του διπλανού σχήματος, να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:



α. $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=f(-3)=0$ Σ□ Λ□

β. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=1$ Σ□ Λ□

γ. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=2$ Σ□ Λ□

δ. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$ Σ□ Λ□

ε. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ Σ□ Λ□

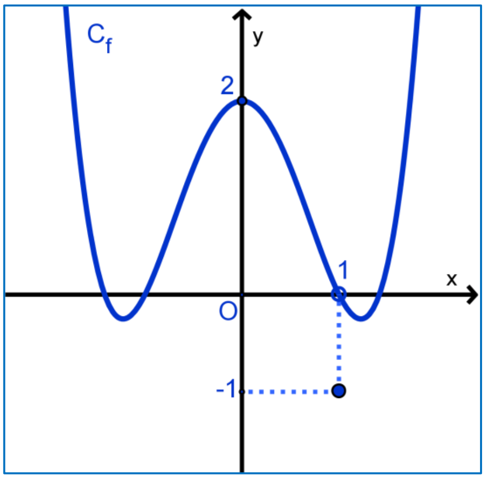
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Γραφική παράσταση και όρια

1.4.8. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια και τις τιμές:

α. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $f(0)$

β. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $f(1)$



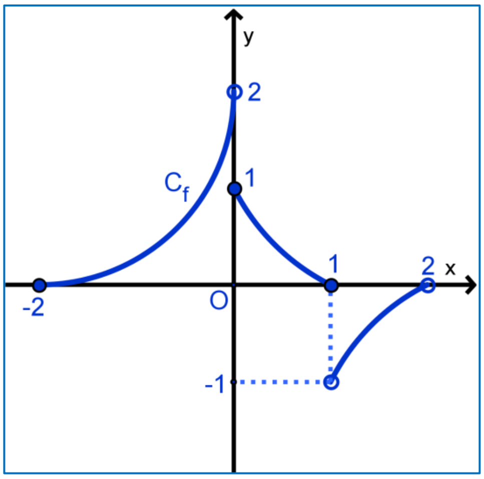
1.4.9. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια και τις τιμές:

α. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ και $f(-2)$

β. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $f(0)$

γ. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $f(1)$

δ. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ και $f(2)$



1.4.10. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

α. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$, $x_0=2$

β. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

γ. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -x+1, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

δ. $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x_0=0$

(Άσκηση Α2 σχολικού βιβλίου)

1.4.11. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

α. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$, $x_0=1$ ή $x_0=-1$

β. $f(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{9x^2-6x+1}}{3x-1}$, $x_0=\dfrac{1}{3}$

(Άσκηση Α3 σχολικού βιβλίου)

1.4.12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x-2}{x-1}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-1,1)$, τότε:

α. Να βρείτε τον $\alpha\in\mathbb{R}$.

β. Να χαράξετε την C_f.

γ. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Αναζήτηση ορίου

1.4.13. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$:

α. $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$ και $x_0=1$

β. $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-3}$ και $x_0=2$

γ. $f(x)=\sqrt{x-x^3}+\sqrt{1-x^2}$ και $x_0=-1$ ή $x_0=1$

1.4.14. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου $\lim\limits_{x\to\alpha^2+\alpha+1}\dfrac{\sqrt{-x^2-x+2}+2}{x^2+1}$.

1.4.15. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου $\lim\limits_{x\to\alpha^2-3\alpha}\dfrac{\ln(4-x^2)}{\sqrt{-x}+2}$.

Ιδιότητες των ορίων

1.4.16. Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, με $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda^2-6$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(Άσκηση Α5 σχολικού βιβλίου)

1.4.17. Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, με $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda^2+\lambda$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\lambda-2$. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

1.4.18. Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, με $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda^2+2\lambda+\kappa$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda^2-\kappa+2$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει, να δείξετε ότι θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$.

1.4.19. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει $\dfrac{\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-5\right)}{3}=\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-3\right)$, να βρείτε τον λ.